浙江工业大学

2020年硕士研究生招生考试试题

考试科目：(861)高等代数　　共2页

★★★★ 答题一律做在答题纸上，做在试卷上无效。 ★★★★

一、填空题(每题 6 分,共 60 分)

1. 已知 n阶方阵A的行列式$|A|=\dfrac{1}{4}$, A^*为A的伴随矩阵, 则$|3A^*-(4A)^{-1}|=$__________;

2. 设A为$m\times n$阶矩阵, B为$n\times m$阶矩阵, E为m阶单位矩阵. 若$AB=E$, 则 $R(BA)=$__________;

3. 设3阶方阵A,X满足$2A=XA-4X$. 若已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,则矩阵 $X=$__________;

4. 设$A=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)$为3阶方阵, 若$\alpha_1$, α_2 线性无关, 且$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$, 则齐次线性方程组$AX=\mathbf{0}$的通解为__________;

5. 向量组 $\alpha_1=(1,1,2,2,1)^T$, $\alpha_2=(0,2,1,5,-1)^T$, $\alpha_3=(2,0,3,-1,3)^T$, $\alpha_4=(1,1,0,4,-1)^T$生成的向量空间的维数是 __________;

6. 矩阵$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$的若尔当标准形是__________;

7. 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$分别是$\mathbf{R}^3$的两组基, 且满足$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_2=\alpha_2-\alpha_3$, $\beta_3=-2\alpha_3$, 则基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵是__________. 若向量$\gamma$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标是(1, 1, 1),则向量$\gamma$在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的坐标是__________;

8. 若 2 阶方阵 A具有两个不同的特征值且满足$A^2=E$, 则A的特征值是__________;

9. 已知三维线性空间$\mathbf{R}^3$上的线性变换T在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵为$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则该线性变换$T$在基$\varepsilon_3,2\varepsilon_2,\varepsilon_1$下的矩阵为__________;

10. 设多项式$f(x)=x^3-3x^2-\frac{a}{2}x-b, g(x)=x^3+ax+b$的最大公因式是一个二次多项式, 则$a=$__________, $b=$__________.

二、**(15分)** 计算n阶行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}.$$

三、**(15分)**设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ $(m>1)$线性无关, 向量$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$. 证明: 向量组$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

四、**(15分)**设n阶方阵A可逆, A^*为其伴随矩阵, E为n阶单位阵,$\boldsymbol{\alpha}$为n维列向量, b为常数,令

$$P=\begin{pmatrix} E & O \\ -\boldsymbol{\alpha}^T A^* & |A| \end{pmatrix}, \quad Q=\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^T & b \end{pmatrix}$$

(1)计算分块矩阵PQ; (2)证明矩阵Q可逆的充要条件是$\boldsymbol{\alpha}^T A^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$.

五、**(15分)**设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-5x_2^2+ax_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$在正交变换$X=QY$下的标准形为$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$, 其中$X=(x_1,x_2,x_3)^T, Y=(y_1,y_2,y_3)^T$, 求$a$的值及对应的正交矩阵$Q$.

六、**(15分)**设矩阵A为n阶对称阵, 且$|A|<0$, 证明: 存在n维实向量X满足$X^TAX<0$.

七、**(15分)**设A是数域F上的n阶幂等矩阵($A^2=A$). 证明:n维线性空间F^n可分解为齐次线性方程组$AX=\mathbf{0}$ 与$(A-E)X=\mathbf{0}$的解空间的直和.